إشارة حدانية

إشارة و تعميل ثلاثية الحدود

ذ. محمد الكيال

↩ إشارة الحدانية: $ax+b$ $\quad(a\neq 0)$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

↩ إشارة و تعميل ثلاثية الحدود: ax^2+bx+c $\quad(a\neq 0)$

نضع : $P(x)=ax^2+bx+c$

المميز		حل المعادلة: $P(x)=0$ $x\in\mathbb{R}$	إشارة $P(x)$	تعميل $P(x)$
$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta<0$	$S=\varnothing$	x: $-\infty$ ... $+\infty$ ؛ $P(x)$: إشارة a	غير ممكن بواسطة حدانيتين
	$\Delta=0$	$S=\left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$	x: $-\infty$ ، $-\dfrac{b}{a}$ ، $+\infty$ ؛ $P(x)$: إشارة a ، 0 ، إشارة a	$P(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$
	$\Delta>0$	$S=\{x_1;x_2\}$ حيث: $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	x: $-\infty$ ، x_1 ، x_2 ، $+\infty$ ؛ $P(x)$: إشارة a ، 0 ، عكس إشارة a ، 0 ، إشارة a (نفترض أن: $x_1<x_2$)	$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

إذا كان x_1 و x_2 حلي المعادلة: $ax^2+bx+c=0$ $\quad x\in\mathbb{R}\quad (a\neq 0)$

فإن: $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$ و $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$

متطابقات هامة

مجموعة تعريف دالة عددية

ذ. محمد الكيال

متطابقات هامة:

لكل عددين حقيقيين a و b

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

مجموعة تعريف بعض الدوال العددية:

لتكن P و Q حدوديتين

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بما يلي :	مجموعة تعريف الدالة f هي :
$f(x) = \mathrm{P}(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{\mathrm{P}(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{\mathrm{P}(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \mathrm{P}(x) \geq 0\}$
$f(x) = \dfrac{\mathrm{P}(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{\mathrm{P}(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \mathrm{P}(x) \geq 0$ و $Q(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{\dfrac{\mathrm{P}(x)}{Q(x)}}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{\mathrm{P}(x)}{Q(x)} \geq 0\right.$ و $Q(x) \neq 0\}$

ذ. محمد الكيال

النهايات (تذكير)

نهايات الدوال $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ و مقلوباتها:

$\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

إذا كان n عددا زوجيا فإن:	إذا كان n عددا فرديا فإن:
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$

نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

نهاية حدودية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة	نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

نهايات الدوال المثلثية:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

نهايات الدوال من النوع: $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{u(x)}$
$\ell \geq 0$	$\sqrt{\ell}$
$+\infty$	$+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

النهايات و الترتيب:

$$\left.\begin{array}{l} |f(x)-\ell| \leq V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \leq V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x)=\ell \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x)=\ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x)=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \leq V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x)=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

العمليات على النهايات:

نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [g(x)+f(x)]$	$\ell+\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م

نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	$\ell<0$		$\ell>0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [g(x)\times f(x)]$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م

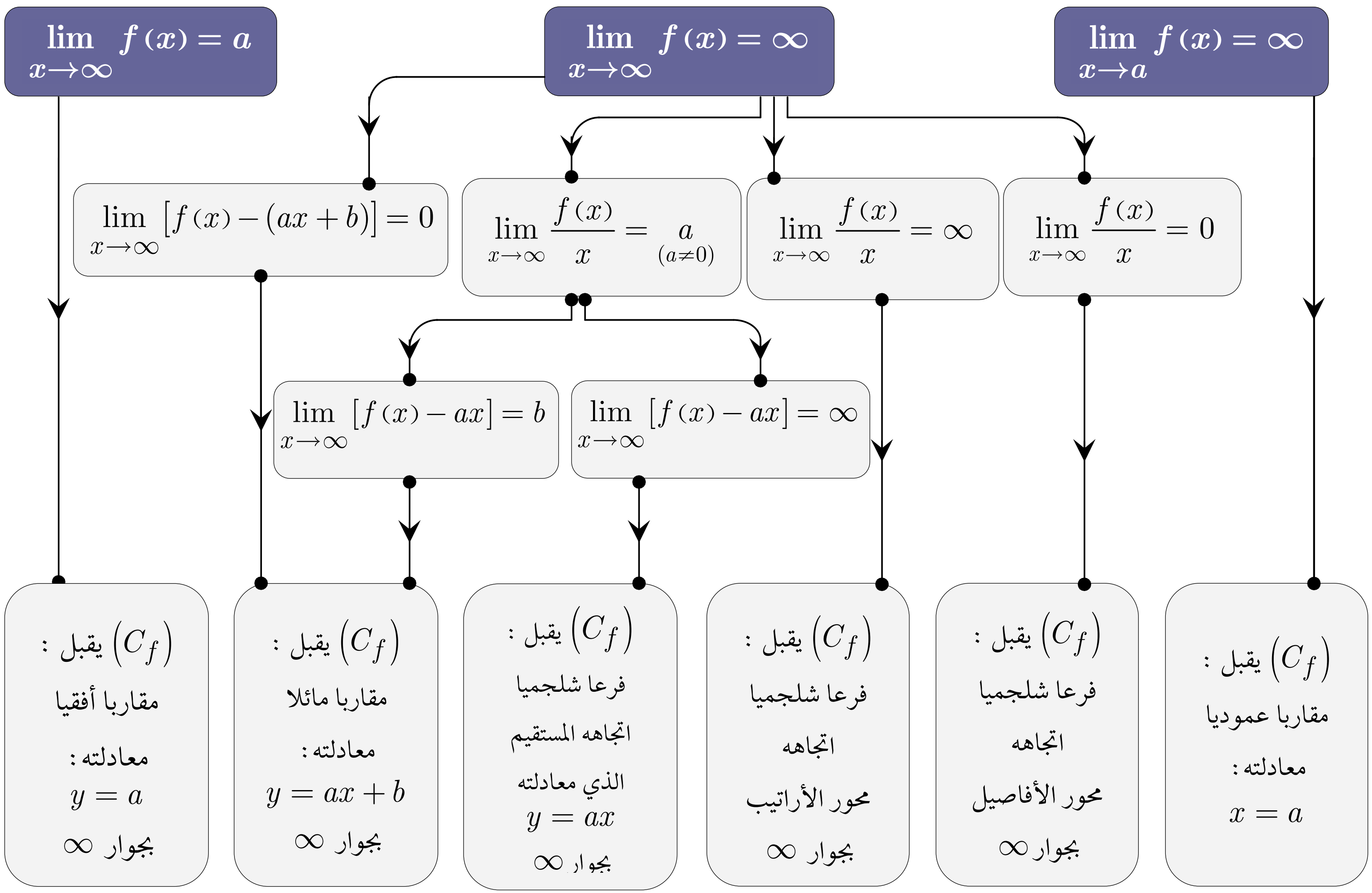
نهاية خارج دالتين:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell<0$		$\ell>0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م	ش غ م

ملاحظة عامة:

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

الفروع اللانهائية



د: محمد الكيال

دراسة دالة عددية

لدراسة دالة عددية f غالبا ما نتبع المراحل التالية :

1- تحديد مجموعة تعريف الدالة f .
2- دراسة زوجية ودورية الدالة f ، ثم تحديد حيز الدراسة D_E .
3- حساب نهايات الدالة f عند محدات مجموعة تعريفها.
4- دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على D_E.
5- دراسة تغيرات الدالة f :

أ- حساب الدالة المشتقة f' .
ب- دراسة إشارة الدالة المشتقة.
ج- استنتاج تغيرات الدالة f ،ثم إعطاء جدول تغيرات .

لتمثيل منحنى الدالة f غالبا ما نتبع المراحل التالية:

6- دراسة الفروع اللانهائية .
7- دراسة الوضع النسبي لمنحنى الدالة f بالنسبة لمقارباتها الأفقية والمائلة إن وجدت.
8- تحديد تقاطع (C_f) مع محوري المعلم (إذا أمكن) .
9- إعطاء معادلة مماسات (C_f) في هده النقط .
10- دراسة تقعر منحنى الدالة f وتحديد نقط انعطافه ان وجدت.
11- إنشاء المنحنى:

أ- إنشاء معلم متعامد ممنظم (في غالب الأحيان).
ب- إنشاء المماسات السابقة و الموازية لمحور الأفاصيل.
ج- إنشاء المقاربات.
د- إنشاء منحنى الدالة f مع مراعاة التقعر ووضع المنحنى بالنسبة لمقاربيه.